

多小波的预处理及其在图像压缩中的应用

王 玲¹, 宋国乡²

(11 四川师范大学计算机科学学院, 四川成都 610066; 21 西安电子科技大学应用数学系, 陕西西安 710071)

摘 要: 多小波是近几年小波理论研究的一个重要方向, 但在图像压缩中还没有成功的例子; 本文综述了多小波的重要性质, 对几个常用多小波作了预处理; 图像压缩应用实验结果表明平衡处理比预滤波效果好, 尤其是 Op2rec1 多小波能精确重构, 无边界失真, 在一定的压缩比下可达到很高的峰值信噪比 PSNR.

关键词: 多小波; 预滤波; 平衡小波; 图像压缩

中图分类号: TN911.73 **文献标识码:** A **文章编号:** 03722112 (2001) 101418203

The Pre2Processing of Multiwavelet and Its Application in Image Compression

WANG Ling, SONG Guo2xiang

(11 School of Computer Science of Sichuan Normal University, Chengdu, Sichuan 610066, China;
21 Department of Applied Mathematics of Xidian University, Xi. an, Shanxi 710071, China)

Abstract: Some important performances of multiwavelets are summarized, and pre2processing of several multiwavelets are pre2posed. An image compression example is given, with satisfactory effects. The results show that the multiwavelet transform of Op2rec1 has non2boundary distortion, and can obtains high peak signa2to2noise ratio (PSNR).

Key words: multiwavelet; prefilter; balanced multiwavelet; image compression

1 引言

近十年来, 小波在图像处理中的应用已经非常广泛, 在这方面的研究重点之一是如何选择好的小波基. 由于图像本身的特点, 再加上人眼的视觉特性, 要求小波基能同时拥有许多好性质^[1], 例如正交性、对称性、短支集、高消失矩等, 对单小波来说却是不可能的^[2]. 目前, 有关小波理论发展的一个非常重要的方向))) 多小波理论研究引起了人们广泛的关注, 并在最近两年内取得了较大的进展. 1994 年, Goodman 等人基于 r 阶的多分辨分析, 建立了多小波的基本理论框架^[3]; 同年, Geronimo, Hardin 和 Massopust 利用分形插值, 成功地构造了正交、短支集、实对称和二阶逼近的多尺度函数 $\psi(t) = [\psi_0(t), \psi_1(t)]^T$, 称为 GHM 多小波^[4]. 1996 年以后, 更多的对称、正交多小波被构造出来^[5,6], 多小波的理论研究也取得了突破^[5~7], 为多小波的实际应用奠定了基础.

尽管多小波理论研究取得了不少实质性的结果, 但将它们应用于图像处理中却非常困难, 现在还没有见到这方面成功的例子; 其根本原因是: 1 大多数构造的多尺度函数不满足低通特性(即 $H(0) = I_r$); 2 如何将一维信号转换为多小波需要的向量输入流. 通常的解决办法是对初始采样序列进行适当的预滤波处理^[8]; 遗憾的是, 现有的预滤波器却破坏了多小波的正交性和对称性. 基于低通特性, Lebrun 和 Vetterli 提出了多小波的平衡改进方法^[9], 避免了预滤波.

本文在综述了多小波的重要性质后, 对几个常用多小波作了预处理; 图像压缩应用实验结果表明平衡处理比预滤波效果好, Op2rec1、Chui2 和 Jiang2 等多小波在图像压缩中都取得了较好的结果, 尤其是精确重构 Op2rec1 多小波, 无边界失真, 在一定的压缩比下可达到很高的 PSNR, 比正交单小波 Daubechie24 的效果好.

2 多小波及其性质

定义 1 一组函数集 $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_r)^T$, ($r \geq 1$) 称为 r 阶正交多小波, 如果其伸缩和平移 $\psi_{j,k} = (\psi(2^{-j}x - k), \dots, \psi(2^{-j}x - k))^T$, ($j, k \in \mathbb{Z}$) 形成 $L^2(\mathbb{R})$ 的一组正交基.

为了概念清楚, 我们称 $r = 1$ 时 ψ 为单小波, $r > 1$ 时 ψ 为多小波. 与单小波一样, 生成正交多小波 ψ 相应的多尺度函数 $\psi = (\psi_0, \dots, \psi_r)^T$ 仍然满足 r 阶的多分辨分析^[5], 于是存在 $r \times r$ 的矩阵 H_k 和 G_k , 使 ψ 和 ψ 满足矩阵尺度方程:

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} H_k \psi(2x - k) \tag{1}$$

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} G_k \psi(2x - k) \tag{2}$$

或在频域上表示:

$$\psi(X) = H(X/2) \psi(X/2) \quad \psi(X) = G(X/2) \psi(X/2)$$

其中 H 和 G 分别是 $\{H_k\}$ 和 $\{G_k\}$ 的矩阵频率响应:

$$H(X) = (1/2) \sum_k H_k e^{-jkX} \quad G(X) = (1/2) \sum_k G_k e^{-jkX}$$

若 $H_k = 0_r, G_k = 0_r, k < 0$ 或 $k > N, N \in \mathbb{Z}_+$ (这里 0_r 代表 r @ r 的零阵), 则称 $\{5, 7\}$ 是紧支的, 此时 $\{H, G\}$ 是 FIR 多滤波组。

性质 1 设多尺度函数 $5(x)$ 产生 r 阶多分辨 $\{V_r\}$, 且满足(1), 7 是对应的多小波, 相应的矩阵频率响应是 H 和 G , 若 $5(x)$ 是紧支正交的, 则:

$$B 5(X) = \left[\prod_{n=1}^j H(\exp(-iX/2^n)) \right] u; \text{ 这里, } u = 5(0) \text{ 是 } H(0) \text{ 的右 } 12 \text{ 特征向量.}$$

CH 满足正交条件:

$$\sum_j H_j H_{j+2k}^T = 2\delta_{k,0} I_r, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

7 是正交的, 当且仅当 G 满足如下正交条件:

$$\sum_j H_j G_{j+2k}^T = 0, \quad \sum_j G_j G_{j+2k}^T = 2\delta_{k,0} I_r, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (4)$$

D 若 R 是任意的正交矩阵, 则: $5(x) = R5(x)$ 和 $7(x) = R7(x)$ 仍然是正交的多尺度函数和多小波, 对应的矩阵频率响应时: $H(X) = RH(X)R^T$ 和 $G(X) = RG(X)R^T$

B 和 C 的证明同单小波, D 的证明是显然的。

性质 2 设多尺度函数 $5(x) = (U_0, \dots, U_r)^T$ 产生 r 阶多分辨分析 $\{V_r\}$, 且满足(1), 若 $\text{supp}U_0 = \dots = \text{supp}U_r = [0, N]$; U_i ($0 \leq i \leq r$) 是对称的或反对称的, 则 $H_k = S_r H_{N-k} S_r$; S_r 是 r @ r 的对角阵, $S_r(i, j) = \begin{cases} 1, & i = j \text{ 且 } U_i \text{ 是对称的} \\ -1, & i = j \text{ 且 } U_i \text{ 是反对称的} \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$

该性质是文[7]中定理 1 的简单推广。

定义 2 一个正交多小波称为 1 阶平衡多小波, 当且仅当其低通综合 H^T 保持向量 u_1 不变, 即: $H^T u_1 = u_1, u_1 = (1, \dots, 1, 1, 1, \dots)^T$ 。由性质 2 可知, 定义 2 等价于 $5(0) = (1, 1)^T$ 。

3 几个多小波在图像压缩中的预处理

只考虑 $r = 2$ 的情况. 选择以下几个多小波。

(1) $N = 1, U_0$ 是对称的, U_1 是反对称的, U_0 和 U_1 都在 $[0, 1]$ 上有支撑; 可直接计算出:

$$H_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix} \quad H_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$G_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad G_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于所构造的多小波对应滤波器的长度是 2, 因而在分解后能精确重构, 无边界失真效应, 在应用时避免了边界延拓; 我们称该小波为 Op2rec1. (2) $N = 2$, 文[6]中的多小波, U_0 是对称的, U_1 是反对称的, U_0 和 U_1 都在 $[0, 2]$ 上有支撑, 具有 2 阶消失矩, 满足 Hermite 插值条件; 称该小波为 Chui2. (3) GHM 多小波^[4], U_0 在 $[0, 1]$ 上有支撑, U_1 在 $[0, 2]$ 上有支撑, U_0 和 U_1 是对称的, 具有 2 阶消失矩. (4) $N = 2$, 文[5]中的 $(2H(X), 2G(X))^T$, 考虑到小波应具有高阶逼近性^[9], 我们取 $\cos H_0 = -1/2, \sin H_0 = -\sqrt{3}/2$, 这样 U_0 是对称的, U_1 是反对称的, U_0 和 U_1 都在 $[0, 2]$ 上有支撑, 具有 2 阶消失矩; 称该小波为 Jiang2.

分析这些多滤波器组 $\{H, G\}, H(0)$ 的右 12 特征向量 $u \in \mathbb{R}^r$, 这样低频信息就不能被保持 (即不满足低通特性); 而 G

(0) $X 0_r$, 使得大多数平滑信号不能被 G 滤掉 (即不满足高通特性); 因而在使用时, 必须要作预处理。

对 Op2rec1, Chui2 和 Jiang2 多小波, 因为满足性质 2 的条件, 故采用平衡改进. 由于在信号去噪、图像压缩等许多应用中, 我们希望高频的细节部分除边缘点外, 大多数为零, 即 G 要有好的高通特性. 设 R 是正交阵, 考虑一阶近似, 有:

$$[1, 1] R^T G(0) R = [0, 0], \text{ 再与低通特性相结合: } [1, 1] R^T H(0) R = [1, 1], \text{ 计算出 } R_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 或者 } R_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ 都}$$

满足要求, 称这样的 R 为平衡器. 此时具有良好低通高通特性的多小波滤波组是 $\{H, G\} = \{RHR^T, RGR^T\}$. 改进后并不影响原小波的其他性质, $R5(x)$ 仍是对称的, $R7(x)$ 具有弱意义上的对称 (W_1 关于 W_2 对称). 但选择 R_1 还是 R_2 要根据生成滤波器组的频率响应来决定. 低通频率响应公式是:

$$P_A(X) := \sum_{k=1}^N H_k(A, 1) \exp(-ikX) + H_k(A, 2) \exp(-ikX)$$

高通频率响应公式 $q_A(X)$ 同上 (将 H 换成 G), $A = 1, 2$. 经计算我们发现, Op2rec1 和 Chui2 选择平衡器 R_1 , 而 Jiang2 选择 R_2 (见图 1)。

对 GHM 多小波, 由于两个分量尺度支集不相等, 不满足: $H_k = S_r H_{N-k} S_r$, 采用平衡处理的效果并不好 (实验结果也证实了这一点), 决定用预滤波方法; 我们将几个预滤波器作了比较, 发现重复信号法和 [8] 中的 Xia 方法均不适合图像压缩, 前者不利于压缩, 后者的重构图像质量太差 (与文 [10] 的结果一致); 较好的预滤波器是^[10]:

$$Q_0 = \begin{bmatrix} 11186 & 0 \\ 0 & 018432 \end{bmatrix}$$

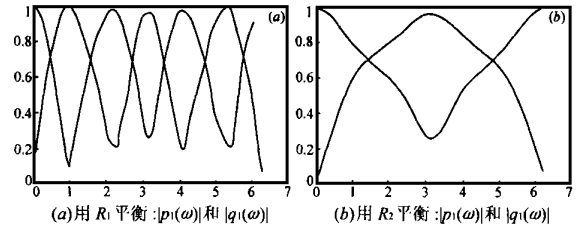


图 1 Jiang2 多小波选用不同平衡器的频率响应

4 实验结果

为了解决向量输入流问题, 仍需要对采样数据 s 作等值向量分流, 再作向下 $y 2$ 采样。

定义如下块矩阵 (对 GHM 则不作用 R):

$$C^j = (1/\sqrt{2}) \begin{bmatrix} RH_0 R^T & RH_1 R^T & RH_2 R^T & , & 0 & , & 0 \\ 0 & 0 & RH_0 R^T & RH_1 R^T & RH_2 R^T & 0 & , \\ , & , & , & , & , & 0 & , \\ 0 & 0 & 0 & 0 & RH_0 R^T & RH_1 R^T & \end{bmatrix}_{\frac{M}{2} \times \frac{M}{2}}$$

D^j 的定义同上, 只不过将 H_0 和 H_1 换成 G_0 和 G_1 . $l_j = M/2^{j-1}, M$ 是原始数据长度. 于是有如下的分解公式:

$$v_1 = C^1 * s \quad w_1 = D^1 * s$$

$$v_2 = C^2 * v_1 \quad w_2 = D^2 * v_1, \dots$$

$$v_j = C^j * v_{j-1}, C^1 * s \quad w_j = D^j * v_{j-1}, C^1 * s$$

重构公式是: $v_j = (C^j)^T v_j + (D^j)^T w_j$

二维图像的多小波分解重构是将上面的公式先对行作用,再对列作用.用上面给出的多小波作预处理(GHM是对图像分别按行、列预滤波,再向下y 2采样)后,对Lena图像(256@256)进行3层小波分解,标量化后,对高通部分使用阈值t,将阈值内的元素赋值为零;反量化后重构图像(图2).用以下公式来估计压缩比:

$$CN = \frac{8}{\frac{1}{4}(e_{w1}) + \frac{1}{16}(e_{w2}) + \frac{1}{64}(e_{w3}) + \frac{1}{64}(e_{v3})}$$



图2 多小波对Lena重构图像(局部)

表1 小波分解的低通能量及所占整个图像能量的比例

能量集中 小波	第一层分解 LL1的能量	第二层分解 LL2的能量	第三层分解 LL3的能量
Op2rec1(R ₁ 平衡) N=1	110138e+009 (981.83%)	919972e+008 (971.46%)	917988e+008 (951.52%)
Daubichies单小波 N=3	110103e+009 (981.59%)	919264e+008 (971.16%)	916145e+008 (941.95%)
Chui2(R ₁ 平衡) N=3	110016e+009 (981.40%)	914484e+008 (961.89%)	814301e+008 (941.18%)
Jiang2(R ₂ 平衡) N=2	919045e+008 (971.30%)	912346e+008 (941.72%)	811228e+008 (901.72%)
GHM(未预滤波) N=3	915377e+008 (931.08%)	912500e+008 (911.21%)	817936e+008 (881.75%)
GHM(预滤波) N=3	110351e+009 (951.55%)	110069e+009 (931.91%)	915706e+008 (911.45%)

其中 e_{w_j} 表示第j层分解的高通部分每点的灰度占用比特数的熵, e_{v_3} 是第3层低通部分每点所用比特数的熵.我们计算了各层分解后,其低通能量占整个图像能量的比例(表1),这里的能量定义为:每点灰度值的平方和;给出了不同压缩比下各恢复图像的峰值信噪比PSNR,与单小波Daubichies24作了比较(见图3),结果表明:几个平衡多小波都获得了满意的结果,

Chui2由于满足插值条件,主观效果更好一些;Op2rec1多小波的能量集中性较好,又没有边界效应,在一定的压缩比下可获得非常高的PSNR,主观效果也非常好;适用于对图像质要求比较高的压缩.

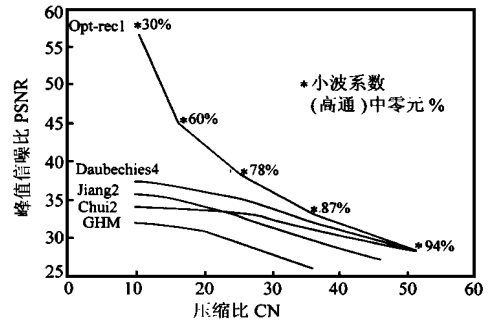


图3 多小波与Daubichies24压缩与峰值信噪比比较

如果将Op2rec1多小波分解和Huffman编码、零树编码、分层预测编码等编码技术相结合,必将会取得更大的压缩比.

由于预滤波只对初始采样信号作了预处理,不能根本改变滤波器本身的特性,所以在图像压缩中平衡多小波的效果好于预滤波处理,所以对多小波应先考虑其平衡性.

参考文献:

- [1] 王玲,宋国乡.西安电子科技大学学报,1999,3.
- [2] I Daubichies. Ten lectures on wavelets [A]. CBMS/NSF Regional Conf [C], Ser. in Appl. Math., SIAM, Philadelphia, PA, 1992.
- [3] T N T Goodman, S L Lee. Wavelets of multiplicity r [J]. Trans. Amer. Math. Soc., March 1994, 342(1): 307- 324.
- [4] J S Geronimo, D P Hardin, P R Massopust. J Approx. Theory, 1994, 78: 373- 401.
- [5] Qingtang Jiang. IEEE Trans. on Signal Processing, Dec. 1998, 46(12): 3292- 3302.
- [6] C K Chui, J 2a Lian. A study of orthonormal multiwavelets [J]. Appl. Numer. Math., 1996, 20(3): 273- 298.
- [7] D K Wasin, W So, J Z Wang. Global support of a scaling vector [C]. Appl. Comput. Harmonic Anal. 1998, 5: 493- 498.
- [8] X 2G Xia, J S Geronimo, D P Hardin, B W Suter. Design of prefilters for discrete multiwavelet transforms [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, Jan. 1996, 44(1): 25- 35.
- [9] J Lebrun, M Vetterli. Balanced multiwavelets theory and design [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, April 1998, 46(4): 1119- 1125.
- [10] J T Miller, Ching Chung Li. Adaptive multiwavelet initialization [J]. IEEE Trans. on Signal Processing, Dec. 1998, 46(12): 3282- 3291.

作者简介:

王玲女.1966年4月出生于四川眉山.副教授,博士,研究方向:多小波理论、信号和图像处理,以及数据结构和计算机模式识别.

宋国乡女.出生于苏州.教授,博士生导师,研究方向:小波理论及应用,数学建模、算法及应用研究.